

*Ю. М. АНДРЕЕВ***АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОМПЬЮТЕРНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Запропоновано аналітичні алгоритми для систем комп'ютерної алгебри, що вирішують завдання механіки структурно складних плоских і просторових дискретних моделей. При цьому використовується метод опису геометричних і механічних властивостей систем, прийнятий в програмі такого класу KiDiM. Алгоритми включають аналітичну діагностику моделі, формування функцій кінетичної і потенційної енергії, лагранжіана, виразів перших інтегралів рівнянь руху.

**Ключові слова:** комп'ютерна алгебра, аналітична механіка, комп'ютерні аналітичні перетворення.

Предложены аналитические алгоритмы для систем компьютерной алгебры, решающих задачи механики структурно сложных плоских и пространственных дискретных моделей. При этом используется метод описания геометрических и механических свойств систем, принятый в программе такого класса KiDiM. Алгоритмы включают аналитическую диагностику модели, формирование функций кинетической и потенциальной энергии, лагранжиана, выражений первых интегралов уравнений движения.

**Ключевые слова:** компьютерная алгебра, аналитическая механика, компьютерные аналитические преобразования.

Analytic algorithms for computer algebra systems solving problems of the mechanics of structurally complex plane and spatial discrete models are proposed. In this case, a method is used to describe the geometric and mechanical properties of systems adopted in a program of this class of KiDiM. The algorithms include analytical diagnostics of the model, the formation of the kinetic and potential energy functions, the Lagrangian, the expressions for the first integrals of the equations of motion. Analytical computer algorithms for diagnostics of system conservatism, presence of cyclic coordinates, Jacobi integral – generalized energy integral and Routh integrals, automatic formation of such integrals are presented. Discrete mechanical systems described in generalized coordinates and pseudo-coordinates with arbitrary constraints are considered. The description of mechanical models used here is based on the discrete elements – power, inertial, dissipative and elastic. Such elements are assigned, respectively, to active forces acting in the system, inertia forces, linear viscous friction forces and linear elastic forces. This allows one to compactly describe the model and easily change its parameters and structure. Algorithms are proposed that, based on these data, allow the automatic construction of analytical expressions for kinetic and potential energies. After the construction of the kinetic and potential energies, the Lagrange function is constructed. Further, on the basis of an analysis of its explicit dependence on time and on generalized coordinates, the presence of the first Jacobi and Routh integrals is diagnosed. After this, these integrals are constructed.

**Key words:** computer algebra, analytical mechanics, computer analytical transformations.

*П. Н. АНДРЕНКО, А. Ю. ЛЕБЕДЕВ, А. Л. ГРИГОРЬЕВ***ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТОРЦЕВЫХ УПЛОТНЕНИЙ РОТОРА ЛАБИРИНТНО-ВИНТОВОГО НАСОСА**

Складено математичну модель роботи торцевого ущільнення із гладкими кільцями із реліту в умовах рідинного тертя. Особливістю моделі є врахування теплового розширення рідини в зазорі між кільцями; цей ефект, що діє разом із силами тертя, утворює додатковий тиск та підйомну силу, яка залежить від ширини зазору та швидкості ковзання. У розробленій моделі відображено процеси виділення, переносу та відводу тепла в елементах ущільнення, а також використовується сила спротиву осевому переміщенню кільця, яке виникає у зазорі під дією насосного ефекту та тертя у рідині, що перетікає; інерційність цієї рідини враховано методом приведення мас. Виконано лінеаризацію моделі і отримано динамічні характеристики перехідних процесів та вимушених коливань пристрою. Сформульовано умови, що накладаються на параметри торцевого ущільнення для забезпечення режиму рідинного тертя, що мінімізує знос.

**Ключові слова:** лабиринтно-гвинтовий насос, торцеве ущільнення ротора, кільця із реліту, рідинне тертя, насосний ефект, приведення мас.

Составлена математическая модель работы торцевого уплотнения с гладкими кольцами из релита в условиях жидкостного трения. Особенностью модели является учет теплового расширения жидкости в зазоре между кольцами; этот эффект, действующий совместно с силами трения, создает дополнительное давление и подъемную силу, зависящую от ширины зазора и скорости скольжения. В разработанной модели отображаются процессы выделения, переноса и отвода тепла в элементах уплотнения, а также используется сила сопротивления осевому перемещению кольца, возникающая в зазоре под действием насосного эффекта и трения в перетекающей жидкости; инерционность этой жидкости учитывается методом приведения масс. Выполнена линеаризация модели и получены динамические характеристики переходных процессов и вынужденных колебаний устройства. Сформулированы условия, накладываемые на параметры торцевого уплотнения для обеспечения режима жидкостного трения, что минимизирует износ.

**Ключевые слова:** лабиринтно-винтовой насос, торцевое уплотнение ротора, кольца из релита, жидкостное трение, насосный эффект, приведение масс.

A mathematical model of the work of the mechanical seal with smooth rings made from cast tungsten carbide in the condition of liquid friction is drawn up. A special feature of this model is the allowance for the thermal expansion of a liquid in the gap between the rings; this effect acting in the conjunction with the frictional forces creates additional pressure and lift which in its turn depends on the width of the gap and the speed of sliding. The developed model displays the processes of separation, transportation and heat removal in the compaction elements and also the resistance to axial movement of the ring arising in the gap caused by the pumping effect and the friction in the flowing liquid; the inertia of this fluid is taken into account by the mass reduction method. The linearization of the model is performed and the dynamic characteristics of the transient processes and the forced oscillations of the device are obtained. The conditions imposed on the parameters of the mechanical seal are formulated to provide a regime of the liquid friction, which minimizes the wear.

**Key words:** labyrinth screw pump, rotor mechanical seal, rings made from cast tungsten carbide, liquid friction, pumping effect, mass reduction method.

*Ю. В. БАТЫГИН, Е. А. ЧАПЛЫГИН, С. А. ШИНДЕРУК, О. С. САБОКАРЬ***РЕЗОНАНС ВО ВТОРИЧНОМ КОНТУРЕ ТРАНСФОРМАТОРА ТЕСЛА ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКИМ НАПРЯЖЕНИЕМ**

Із залученням математичного апарату теорії електричних ланцюгів без будь-яких гіпотез про будову матеріального світу проаналізовано процеси збудження вторинного контуру трансформатора Тесла гармонійним сигналом в умовах його максимальної ефективності. Визначено кількісні показники дієвості трансформатора в порівнянні з якісними рекомендаціями великого винахідника. Показано, що при резонансі у вторинній обмотці збуджується електрична руйнівна сила, що багаторазово перевищує амплітуду, обумовлену індуктивним зв'язком обмоток трансформатора.

**Ключові слова:** трансформатор Тесла, резонанс, коефіцієнт перетворення енергії, резонансний контур.

С привлечением математического аппарата теории электрических цепей без каких-либо гипотез о строении материального мира проанализированы процес-

сы возбуждения вторичного контура трансформатора Тесла гармоническим сигналом в условиях его максимальной эффективности. Определены количественные показатели действенности трансформатора в сравнении с качественными рекомендациями великого изобретателя. Показано, что при резонансе во вторичной обмотке возбуждается электрическая движущая сила, многократно превышающая амплитуду, обусловленную индуктивной связью обмоток трансформатора.

**Ключевые слова:** трансформатор Тесла, резонанс, коэффициент преобразования энергии, резонансный контур.

In the paper electromagnetic processes of resonant excitation of the secondary circuit of the Tesla transformer by a harmonic signal under conditions of the maximum voltage conversion efficiency are theoretically analyzed. The quantitative indicators of the transformer effectiveness in comparison with the qualitative recommendations of the great inventor are determined. It is shown that at the resonance in the secondary circuit an electromotive force is excited which exceeds the amplitude conditioned by the inductive coupling of the transformer coils. The integral voltage conversion coefficient obtained is proportional to the Q-factor of the secondary circuit, which is consistent with the Tesla's phenomenological statement that the Q-factor of the transformer secondary circuit and the voltage excited at its output are correlated. It is shown that the voltage conversion under resonance excitation and sufficiently large Q-factor of the secondary circuit occurs with efficiency much higher than the conversion at the expense of the inductive coupling between the primary and secondary circuits of the Tesla transformer.

**Key words:** Tesla transformer, resonance, coefficient of energy conversion, resonant circuit.

УДК 539.3

*А. В. ВОРОПАЙ*

## ВОЗДЕЙСТВИЕ НА ПРЯМОУГОЛЬНУЮ ПЛАСТИНУ КОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ПРОИЗВОЛЬНЫХ НАГРУЖЕНИЙ

Розглядаються імпульсні дії довільних складних навантажень на прямокутні пружні ізотропні пластини середньої товщини. Деформування пластини моделюється в рамках уточненої теорії С. П. Тимошенка. Під складними навантаженнями розуміються такі, які можуть мати не тільки поперечну, а й поздовжню складову, а також зосереджені моментні навантаження. Представлена теорія вирішення прямих і обернених задач теорії пружності при дії на пластину скінченної системи незалежних нестационарних навантажень. В рамках прямої задачі в загальному вигляді отримані підсумкові співвідношення, які дозволяють обчислювати переміщення та деформації в довільній точці пластини. Наведено загальний вигляд постановки обернених задач і викладено алгоритм їх вирішення.

**Ключові слова:** пластина середньої товщини, ідентифікація, нестационарне навантаження, система інтегральних рівнянь Вольтерра, регуляризуючий алгоритм А. М. Тихонова.

Рассматриваются импульсные воздействия произвольных сложных нагрузок на прямоугольные упругие изотропные пластины средней толщины. Деформирование пластины моделируется в рамках уточненной теории С. П. Тимошенко. Под сложными нагрузками понимаются такие, которые могут иметь не только поперечную, но и продольную составляющую, а также сосредоточенные моментные нагрузки. Представлена теория решения прямых и обратных задач теории упругости при действии на пластину конечной системы независимых нестационарных нагрузжений. В рамках прямой задачи в общем виде получены итоговые соотношения, которые позволяют вычислять перемещения и деформации в произвольной точке пластины. Приведен общий вид постановки обратных задач и изложен алгоритм их решения.

**Ключевые слова:** пластина средней толщины, идентификация, нестационарное нагружение, система интегральных уравнений Вольтерра, регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова.

Impulse actions of arbitrary complex loads on rectangular elastic isotropic plates of medium thickness are considered. The plate deforming is simulated by the Timoshenko's refined theory. Complex loads are the loads, that can have both transverse and longitudinal components, as well as concentrated moment loads. A theory for solving the direct and inverse problems of the theory of elasticity under a finite system of independent nonstationary loads acting on the plate is presented. Within the framework of the direct problem the resulting relationships are obtained in general form. These resulting relationships allow to calculate the displacements and deformations at an arbitrary point of the plate. A general formulation of the inverse problems is given and an algorithm for their solution is presented.

**Key words:** medium-thickness plate, identification, nonstationary loading, system of Volterra integral equation, Tikhonov's regularization algorithm.

УДК 621.01

*А. Л. ГРИГОРЬЕВ, А. И. ДЕРИЕНКО*

## РАСЧЁТ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРУЖИНЫ ПРИ АСИММЕТРИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ И УЧЕТЕ ФАКТОРОВ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Розроблено чисельно-аналітичний підхід до врахування нелінійних факторів та асиметрії крайових умов. При його реалізації використовується складена раніше лінійна математична модель коливань циліндричної пружини стискання при симетричних умовах закріплення крайніх витків, яка враховує повну групу поздовжніх (а в опорних витках – й поперечних) переміщень перерізу гвинтового стрижня при 3-х (або 6-ти) степенях свободи. Розв'язки рівнянь цієї моделі представлено у формі інтегралів із різницевиими ядрами типу Коші (для перехідних процесів) або Фредгольма (для сталих коливань). Асиметрія та нелінійності враховані як малі додаткові силові дії, що виникають в процесі коливань. Таким чином, наприклад, вдалося врахувати нелінійний спротив середовища при установці пружини у вузькому каналі, який заповнений в'язкою рідиною, а також співударання витків та сухе тертя в опорах. При врахуванні вказаних факторів використано методи суперпозиції розв'язків та простої ітерації.

**Ключові слова:** циліндрична пружина стискання, умови закріплення пружини; модель гвинтового стрижня, згорткові інтеграли, співударання витків, нелінійне зовнішнє тертя, сухе тертя у опорах.

Разработан численно-аналитический подход к учёту нелинейных факторов и асимметрии граничных условий. При его реализации используется составленная ранее линейная математическая модель колебаний цилиндрической пружины сжатия при симметричных условиях закрепления крайних витков, учитывающая полную группу продольных (а в опорных витках – и поперечных) перемещений сечения винтового стержня при 3-х (или 6-ти) степенях свободы. Решения уравнений этой модели представлены в форме интегралов с разностными ядрами типа Коши (для переходных процессов) или Фредгольма (для установившихся колебаний). Асимметрия и нелинейности учитываются как малые дополнительные силовые воздействия, возникающие в процессе колебаний. Таким способом, например, удается учесть нелинейное сопротивление среды при установке пружины в узком канале, заполненном вязкой жидкостью, а также соударения витков и сухое трение в опорах. При учёте указанных факторов используются методы суперпозиции решений и простой итерации.

**Ключевые слова:** цилиндрическая пружина сжатия, условия закрепления пружины; модель винтового стержня, сверточные интегралы, соударения витков, нелинейное внешнее трение, сухое трение в опорах.

A numerical-analytical approach to accounting for nonlinear factors and asymmetry of boundary conditions is developed. For implementing the approach the linear mathematical model of oscillations of a cylindrical compression spring with symmetric conditions of fixed extreme coils taking into account a full group of longitudinal (and for the supporting coils also transverse) displacements of a section of a screw rod with 3 (or 6) degrees of freedom is used. The solutions of the equations of this model are represented in the form of integrals with Cauchy-type (for transient processes) or Fredholm (for steady-state oscillations) difference kernels. Asymmetry and nonlinearities are taken into account as small additional force effects arising in the process of oscillations. In this way, for example, it is possible to take into account the nonlinear resistance of the medium when installing the spring in a narrow channel filled with viscous liquid, as well as the impact of the coils and dry friction in the supports. When these factors are taken into account, the methods of superposition of solutions and simple iteration are used.

**Key words:** cylindrical compression spring, spring fastening conditions; model of a screw rod, convolution integrals, collisions of coils, nonlinear external friction, dry friction in supports.

*П. С. ЗАВЬЯЛОВ, Ю. М. КУХТЕНКОВ, Ю. А. ПОДВОЙСКИЙ, В. Д. ВАРЕНКО*

## К ВОПРОСУ ЧИСЛЕННОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ АМПЛИТУД НИЗКОЧАСТОТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ В ОБРАТИМОЙ ГИДРОМАШИНЕ

Розглядається апробація розробленої раніше математичної моделі і методу розрахунку низькочастотних (джгутових) пульсацій тиску у відсмоктуючій трубі, перевіреної експериментом (моделним і натурним) на ряді радіально-осьових гідротурбін, стосовно оборотних гідромашин типу ОРО в турбінному режимі, зокрема до ОРО170. Необхідні для розрахунку геометричні параметри вихрових джгутів отримані на підставі фотографування потоку у відсмоктуючій трубі на модельному блоці в ГТЛ НПО «Турбоатом». Наведено результати розрахунку амплітуд пульсацій тисків і їх порівняння з експериментальними даними.

**Ключові слова:** математична модель, геометричні параметри вихрових джгутів, апробація методу розрахунку, оборотна радіально-осьова гідромашина, робоче колесо, циркуляція потоку, інтенсивність вихрового джгута, осесимметрична течія, джгутові пульсації тиску.

Рассматривается апробация разработанной ранее математической модели и метода расчета низкочастотных (жгутовых) пульсаций давления в отсасывающей трубе, проверенных экспериментом (моделным и натурным) на ряде радиально-осевых гидротурбин, применительно к обратимым гидромашинам типа ОРО в турбинном режиме, в частности к ОРО170. Необходимые для расчета геометрические параметры вихревых жгутов получены на основании фотографирования потока в отсасывающей трубе на модельном блоке в ГТЛ НПО «Турбоатом». Приведены результаты расчета амплитуд пульсаций давлений и их сравнение с экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** математическая модель, геометрические параметры вихревых жгутов, апробация метода расчета, обратимая радиально-осевая гидромашинка, рабочее колесо, циркуляция потока, интенсивность вихревого жгута, осесимметричное течение, жгутовые пульсации давления.

In the paper applicability of the mathematical model and the method for calculating low-frequency pressure pulsations in a suction tube, previously developed and verified by experiments (model and full-scale) on a number of radial-axial hydroturbines, to reversible hydro machines of the ORO type in the turbine mode, in particular to ORO170, is discussed. The geometric parameters of the vortex swirls necessary for the calculations are obtained on the basis of the photos of the flow in the suction pipe of the model block in the SPA "Turboatom" hydroturbine laboratory. The results of calculating the amplitudes of pressure pulsations are presented and compared with experimental data.

**Key words:** mathematical model, geometric parameters of vortex swirls, calculation method approbation, reversible radial-axial hydraulic machine, impeller, flow circulation, vortex swirl intensity, axisymmetric flow, pressure pulsations.

УДК 629.114.2.073.286

*В. І. КАЛЬЧЕНКО, А. П. КОЖУШКО, А. Р. КІСЕЛЬОВ*

## ОЦЕНКА ПЛАВНОСТИ РУХУ КОЛІСНОГО ТРАКТОРА ХТЗ-242К ПРИ ВПЛИВІ НЕРІВНОСТЕЙ ПОВЕРХНІ

Наведено математичний опис руху підресорених мас колісного трактора ХТЗ-242К, який має ресорну підвіску. Представлено передаточну функцію підресореної маси трактора. Сформовано випадкову функцію мікропрофілю поверхні, по якій експлуатується колісний трактор при виконанні транспортних та технологічних операцій. Визначено оціночні характеристики плавності руху колісного трактора, які базуються на обчисленні значення дисперсії вертикальних переміщень та прискорень остову передньої та задньої частин трактора.

**Ключові слова:** трактор, коливання остову, передаточна функція, мікропрофіль, плавність руху.

Приведено математическое описание движения поддресоренных масс колесного трактора ХТЗ-242К, который имеет ресорную подвеску. Представлена передаточная функция поддресоренной массы трактора. Сформирована случайная функция микропрофиля поверхности, по которой эксплуатируется колесный трактор при выполнении транспортных и технологических операций. Определены оценочные характеристики плавности движения колесного трактора, основанные на вычислении значения дисперсии вертикальных перемещений и ускорений остова передней и задней частей трактора.

**Ключевые слова:** трактор, колебания остова, передаточная функция, микропрофиль, плавность движения.

In this paper the mathematical description of motion of the submerged masses of a wheeled tractor KhTZ-242K, which has spring suspension, is given. The transmission function of the submerged mass of the tractor is presented, on the basis of which the displacements and accelerations of the front and rear parts of the tractor frame are determined. A random function of the microprofile of the surface (asphalt concrete, ground and spherical spike cultures) on which the wheeled tractor is used during transport and technological operations is formed. The estimation characteristics of the smoothness of motion of the wheeled tractor are determined based on the calculation of the value of the dispersion of vertical displacements and acceleration of the front and rear parts of the tractor frame.

**Key words:** tractor, oscillation of body, suspension function, microprofile, smoothness of motion.

УДК 621.51+539.3

*А. А. КАРПИК*

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТОКА В МЕЖЛОПАТОЧНОМ КАНАЛЕ КОМПРЕССОРА С УЧЕТОМ ВРАЩЕНИЯ РАБОЧЕГО КОЛЕСА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ

Представлено чисельне моделювання турбулентної в'язкої течії газу на основі рівнянь Нав'є-Стокса осереднених по Рейнольдсу (RANS-модель). Результати розрахунку параметрів течії в нестационарній тривимірній постановці отримані за допомогою програмного комплексу F. Чисельний аналіз проводився з метою дослідження характеру течії у вінці робочих лопаток з урахуванням взаємодії між ними. В результаті був отриманий розподіл полів тиску і швидкості в різні моменти часу при обертанні робочого колеса. У міжлопатковому каналі виявлені несприятливі зони течії.

**Ключові слова:** міжлопатковий канал, RANS-модель, в'язка течія, нестационарність.

Представлено численное моделирование турбулентного вязкого течения газа на основе уравнений Навье-Стокса осредненных по Рейнольдсу (RANS-модель). Результаты расчета течения в нестационарной трехмерной постановке получены с помощью программного комплекса F. Численный анализ проводился с целью исследования характера течения в венце рабочих лопаток с учетом взаимодействия между ними. Получено распределение полей давления и скорости в разные моменты времени при вращении рабочего колеса. В межлопаточном канале выявлены неблагоприятные зоны течения.

**Ключевые слова:** межлопаточный канал, численное моделирование, вязкое течение, нестационарность.

This paper presents numerical simulation of turbulent viscous flows using the Reynolds averaged Navier-Stokes (RANS) equations. The gas-dynamic simulation is required to estimate the vibration strength and additional losses caused by the periodic non-stationarity of the gas flow. The non-uniformity of the flow represents itself as a non-uniformity of the fields of the velocity and pressure in front of and behind the working blades. The simulation is carried on for a model describing all the properties, such as compressibility, viscosity, 3D effects, influence of the radial gap, leakages etc. The differential two-parametrical k- $\omega$  SST Menter's model is used as a model of turbulence. The values of the flow parameters in the non-stationary three-dimensional formulation are obtained using the F solver. Numerical analysis is used to investigate the character of the flow in the rotor, in particular the blade interaction. The model allows determining the flow in the blade channel and zones of

the adverse flow. The basic factors causing non-uniformity and non-stationary of the gas flow are determined. The pressure and velocity fields at different times during the rotation of the runner are computed.

**Key words:** blade channel, numerical simulation, viscous flow, non-stationarity.

УДК 621.317.1

*О. Ю. КРОПАЧЕК*

## **КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ КОНТРОЛЯ АВТОКОГЕРЕНТНОСТИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

Удосконалено математичну модель для розрахунку коефіцієнта автокогерентності з метою виявлення частотної і тимчасової нестационарності перехідних випадкових теплових процесів. Показано можливість використання коефіцієнта частотної нестационарності по зрушенню для контролю екстремальних значень багатовимірних теплових процесів при істотних обмеженнях інтервалу часу спостереження. Доведено можливість екстраполяції контрольованих багатовимірних термодинамічних параметрів за вдосконаленими коефіцієнтами автокогерентності з використанням імовірно обґрунтованої процедури локального прогнозування.

**Ключові слова:** теплові процеси, температура, прогнозування, діагностика, ідентифікація, когерентність.

Усовершенствована математическая модель для расчёта коэффициента автокогерентности с целью выявления частотной и временной нестационарности переходных случайных тепловых процессов. Показана возможность использования коэффициента частотной нестационарности по сдвигу для контроля экстремальных значений многомерных тепловых процессов при существенных ограничениях интервала времени наблюдения. Доказана возможность экстраполяции контролируемых многомерных термодинамических параметров по усовершенствованным коэффициентам автокогерентности с использованием вероятностно обоснованной процедуры локального прогнозирования.

**Ключевые слова:** тепловые процессы, температура, прогнозирование, диагностика, идентификация, когерентность.

The mathematical model for computing the coefficient of auto-coherence has been improved to detect the frequency and time nonstationarity of transient random thermal processes. The possibility of using the factor of frequency nonstationarity in the shift to control the extreme values of multidimensional thermal processes is shown under significant limitations of the observation time interval. The possibility of extrapolation of the controlled multidimensional thermodynamic parameters by the improved coefficients of auto-coherence with the use of a probabilistically grounded procedure of local prediction is proved. Equations for predicting error variances for alternative computational procedures are obtained and conditions for improving forecasting efficiency are determined. The possibility of increasing the accuracy of the statistical control of thermal processes when extrapolating by the improved coefficients of auto-coherence is proved.

**Key words:** thermal processes, temperature, prediction, diagnostics, identification, coherence.

УДК 519.6

*Ю. О. МЯГКА, О. Р. БЕЛЯНСЬКА, М. Д. ВОЛОШИН*

## **ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНО-ХІМІЧНОЇ ОБРОБКИ АКТИВНОГО МУЛУ З ПЕРСПЕКТИВОЮ ЙОГО ПОДАЛЬШОЇ УТИЛІЗАЦІЇ**

Наведено дослідження впливу закономірностей процесу знешкодження активного мулу шляхом диспергування активного мулу при додаванні кальцієвмісного шламу; при цьому початкова вологість мулу зменшується у 1,1 рази. Визначено вплив ряду факторів на якість процесу механо-хімічної обробки активного мулу, зокрема вплив температурного режиму процесу, концентрації кальцієвмісного шламу, частоти коливання рідини та тривалості перемішування. Складено технологічну схему механо-хімічної обробки мулу.

**Ключові слова:** активний мул, диспергування, кальцієвмісний шлам, фрезерна мішалка.

Приведены исследования влияния закономерностей процесса обезвреживания активного ила путем диспергирования активного ила при добавлении кальцийсодержащего шлама; при этом начальная влажность ила уменьшается в 1,1 раза. Определено влияние ряда факторов на качество процесса механо-химической обработки активного ила, а именно влияние температурного режима процесса, концентрации кальцийсодержащего шлама, частоты колебания жидкости и продолжительности перемешивания. Составлена технологическая схема узла механо-химической обработки ила.

**Ключевые слова:** активный ил, диспергация, кальцийсодержащий шлам, фрезерная мешалка.

The influence of the regularities of the process of neutralization of activated sludge by dispersing the activated sludge when adding calcium-containing sludge followed by sedimentation is studied. The influence of several factors on the quality of the process of neutralization of the activated sludge by dispersing when adding calcium-containing sludge followed by sedimentation is determined, in particular the influence of the temperature regime of the process, the concentration of the calcium-containing sludge, the frequency of oscillation of the fluid, and the duration of mixing. It is established that the most optimal process is the dispersion of the activated sludge when adding the calcium-containing sludge in the amount of 28 mg/dm<sup>3</sup> in the solution with the active sludge, with the initial humidity of the sludge reducing 1.1 times in terms of 1 kg of dry matter. A process flow diagram of the mechanical and chemical treatment of activated sludge with adding calcium-containing sludge is compiled.

**Key words:** activated sludge, dispersion, calcium-containing sludge, milling mixer.

УДК 519.6

*В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ*

## **ПРО РУХ МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА**

З використанням періодичних еліптичних функцій Якобі одержано два варіанти аналітичного розв'язку нелінійного диференціального рівняння руху. Виведено замкнені формули для обчислення переміщень маятника у часі та періодів коливань, спричинених початковим відхиленням маятника від вертикального положення або наданою йому в цьому положенні початковою швидкістю. Наведено приклади розрахунків, де показано, що результати обчислень переміщень за виведеними формулами добре узгоджуються з результатами числового розв'язку задачі Коші на комп'ютері.

**Ключові слова:** математичний маятник, пружний осцилятор, вільні коливання, задача Коші, аналітичні розв'язки, еліптичні функції.

С использованием периодических эллиптических функций Якоби получены два варианта аналитического решения нелинейного дифференциального уравнения движения. Выведены замкнутые формулы для вычисления перемещений маятника во времени и периодов колебаний, вызванных начальным отклонением маятника от вертикального положения или данной ему в этом положении начальной скоростью. Приведены примеры расчётов, в которых показано, что результаты вычисления перемещений по выведенным формулам хорошо согласуются с результатами численного решения задачи Коши на компьютере.

**Ключевые слова:** математический маятник, упругий осциллятор, свободные колебания, задача Коши, аналитические решения, эллиптические функции.

Two variants of the analytical solution to the nonlinear differential equation of motion are obtained using Jacobi periodic elliptic functions. Closed formula for com-

puting the displacements of the pendulum in time and the periods of its oscillations, induced by the initial deflection from the vertical position or initial velocity communicated to the pendulum in this position, are derived. The computational examples are given. The results of calculating the displacements using the derived formula are in close agreement with the numerical results of solving the Cauchy problem using computer.

**Key words:** mathematical pendulum, elastic oscillator, free oscillations, Cauchy problem, analytical solutions, elliptic functions.

УДК 539.3; 534.1

**В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ**

## ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ОСЦИЛЯТОРА З КУБІЧНО НЕЛІНІЙНОЮ СИЛОВОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ

Описано нелінійні коливання системи з одним ступенем вільності, що має лінійну (від'ємну) і кубічну (додатну) складові у виразі силової характеристики, при позитивному переміщенні системи. Розглянуто три можливих режими руху, в залежності від наданої амплітуди коливань в момент початку руху. Два з них проходять відносно центру, в положенні стійкої рівноваги, а третій – відносно сідлової точки, в положенні нестійкої рівноваги. Побудовано замкнуті аналітичні розв'язки нелінійної задачі Коші, з використанням періодичних еліптичних функцій. Запропоновано наближені подання вказаних спеціальних функцій комбінацією елементарних функцій, що спрощує використання аналітичних розв'язків. Наведено чисельні приклади розрахунків, де показано, що результати обчислень на підставі одержаних розв'язків добре узгоджуються з результатами числового комп'ютерного інтегрування рівняння руху.

**Ключові слова:** вільні коливання, нелінійне диференціальне рівняння руху, аналітичний розв'язок, періодичні еліптичні функції.

Описаны нелинейные колебания системы с одной степенью свободы, которая имеет линейную (отрицательную) и кубическую (положительную) составляющие в выражении силовой характеристики при позитивном перемещении системы. Рассмотрены три возможных режима движения в зависимости от приданной амплитуды колебаний в момент начала движения. Два из них проходят относительно центра, в положении устойчивого равновесия, а третий – относительно седловой точки, в положении неустойчивого равновесия. Построены замкнутые аналитические решения нелинейной задачи Коши, с использованием периодических эллиптических функций. Предложены приближенные представления указанных специальных функций комбинацией элементарных функций, что упрощает применение аналитических решений в расчётах. Приведены численные примеры расчётов, в которых показано, что результаты расчётов на основе полученных решений хорошо согласуются с результатами численного компьютерного интегрирования уравнения движения.

**Ключевые слова:** свободные колебания, нелинейное дифференциальное уравнение движения, аналитическое решение, периодические эллиптические функции.

The paper deals with nonlinear oscillations of a system with one degree of freedom having a linear (negative) and a cubic (positive) components in the power characteristic under the positive motion of the system. Three possible motion modes depending on the oscillation amplitude communicated at the beginning of the motion are considered. Two of the motion modes are at the vicinity of the center, which is a stable equilibrium point, and the third one is at the vicinity of the saddle point, which is a point of unstable equilibrium. Closed analytical solutions for the nonlinear Cauchy problem are obtained using periodic elliptic functions. Approximations of the elliptic functions by a combination of elementary functions are presented which simplifies applying the analytical solutions in computations. The examples of numerical computations given in the paper confirm good compliance of the computational results based on the obtained solutions with the results of numerical computer integration of the equation of motion.

**Key words:** free oscillations, nonlinear differential equation of motion, analytical solution, periodic elliptic function.

УДК 531.16:629.4.067

**В. М. ПЕТУХОВ, Н. А. АКСЁНОВА**

## КИНЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ КОЛЕСНОЙ ПАРЫ ПОСЛЕ СХОДА С РЕЛЬС

Визначено траєкторію руху колісної пари вагону після її сходу з рейок. Побудовано кінематичну модель руху колеса по шпальній решітці. Виконано кінематичний аналіз руху колеса по шпалах. Отримано аналітичний вираз, що зв'язує рух колеса з параметрами верхньої будови колії. Показано, що амплітуда і частота коливань колісної пари при її сході залежать від діаметра колеса, ширини горизонтальної поверхні шпали і відстані між осями шпал. Визначено миттєві центри швидкостей колеса в характерних точках. Розроблена кінематична модель визначає основні діагностичні ознаки сходу вагонів з рейок. Це дозволить створити надійний алгоритм розпізнавання сходу для побудови апаратного і програмного забезпечення технічної системи контролю сходів вагонів з рейок.

**Ключові слова:** колесо, кінематичний аналіз, діагностична модель, траєкторія.

Определена траектория движения колесной пары вагона после ее схода с рельс. Построена кинематическая модель движения колеса по шпальной решетке. Выполнен кинематический анализ движения колеса по шпалам. Получено аналитическое выражение, связывающее движение колеса с параметрами верхнего строения пути. Показано, что амплитуда и частота колебаний колесной пары при ее сходе зависят от диаметра колеса, ширины горизонтальной поверхности шпалы и расстояния между осями шпал. Определены мгновенные центры скоростей колеса в характерных точках. Разработанная кинематическая модель определяет основные диагностические признаки схода вагонов с рельс. Это позволит создать надежный алгоритм распознавания схода для построения аппаратного и программного обеспечения технической системы контроля сходов вагонов с рельс.

**Ключевые слова:** колесо, кинематический анализ, диагностическая модель, траектория.

Kinematic analysis of the movement of a wagon wheel pair after its derailment is performed. Based on the studies carried out, the following results were obtained. The trajectory of motion of the center of the wheel after its coming off the rail along the sleeper grating is determined graphically. The center of the wheel moves rectilinearly along the horizontal section of the sleeper and along the arc of the circle in the areas where the wheel rolls from a sleeper and hits the next one. Thus, the trajectory of motion looks like a cyclic combination of rectilinear segments and segments of circles. An analytic expression characterizing wagon derailment is obtained, which connects the parameters of the upper structure of the track (the sleeper grid) and the wheel. The motion of the center of the wheel is determined by different equations depending on the stages of motion. The law of motion is given by different functions corresponding to different motion stages. It is shown that the amplitude and frequency of oscillations of a wheel pair at its derailment depend on the diameter of the wheel, the width of the horizontal surface of the sleeper and the distance between the axes of the sleepers. Instantaneous centers of wheel velocities at characteristic points are determined. The development of a kinematic model of the movement of a wagon wheel pair after its derailment allows one to proceed constructing a dynamic model of such a motion. The ultimate goal of studying this process should be the construction of a diagnostic model for the derailment of wagons based on the presented kinematic and dynamic models. This will make it possible to create a reliable derailment recognition algorithm for constructing the hardware and software of a wagon derailment technical control system.

**Key words:** wheel, kinematic analysis, diagnostic model, trajectory.

*И. С. РЕВЕЛЮК***КОНТИНУАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СИНФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ СИЛИКОНОВОГО МАСЛА ПО КОЛЬЦЕВЫМ КАНАЛАМ ДЕМПФЕРОВ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВАЛА ДИЗЕЛЯ**

Досліджуються динамічні характеристики в дослідних конструкціях демпферів крутильних коливаний колінчастого вала дизеля, у яких для накопичення і розсіювання енергії резонансних коливаний вала використовуються синфазні течії силіконового масла середньої в'язкості по кільцевих каналах круглого або прямокутного перерізу. На основі рівнянь нестационарного руху нестискуваної рідини складені математичні моделі зазначених течій і, при використанні перетворення Лапласа для перехідного процесу або методу комплексних амплітуд для сталих коливаний, знайдені аналітичні рішення цих рівнянь (у вигляді сум відповідного функціонального ряду). Вказані механічні моделі механізмів, що замінюють, з фрикційними зв'язками, які відповідають цим моделям. Отримано аналітичні вирази для коефіцієнта в'язкого демпфування і приведенного моменту інерції, що залежать від частоти усталених коливаний вала. Виконано порівняння динамічних характеристик для демпферів крутильних коливаний, обладнаних рідким (силіконовим) і твердим (сталевим) маховиком.

**Ключові слова:** демпфування крутильних коливаний, маховик з фрикційним зв'язком, нестационарні течії по каналу, в'язка нестискувана рідина, властивості силіконового масла.

Исследуются динамические характеристики в опытных конструкциях демпферов крутильных колебаний коленчатого вала дизеля, у которых для накопления и рассеивания энергии резонансных колебаний вала используются синфазные течения силиконового масла средней вязкости по кольцевым каналам круглого или прямоугольного сечения. На основе уравнений нестационарного движения несжимаемой жидкости составлены математические модели указанных течений и, при использовании преобразования Лапласа для переходного процесса или метода комплексных амплитуд для установившихся колебаний, найдены аналитические решения этих уравнений (в виде сум соответствующего функционального ряда). Указаны механические модели заменяющих механизмов с фрикционными связями, отвечающие этим моделям. Получены аналитические выражения для коэффициента вязкого демпфирования и приведенного момента инерции, зависящих от частоты установившихся колебаний вала. Выполнено сравнение динамических характеристик для демпферов крутильных колебаний, снабженных жидким (силиконовым) и твердым (стальным) маховиком.

**Ключевые слова:** демпфирование крутильных колебаний, маховик с фрикционной связью, нестационарные течения по каналу, вязкая несжимаемая жидкость, свойства силиконового масла.

Dynamic characteristics in experimental designs of torsional vibration dampers of a diesel engine crankshaft, in which an in-phase flow of silicone oil of medium viscosity along annular channels of circular or rectangular cross-section is used to accumulate and dissipate the energy of resonant vibration of the shaft, are studied. On the basis of the equations of nonstationary motion of incompressible fluid, mathematical models of these flows are compiled. Analytical solutions of these equations are found (in the form of the sums of the corresponding functional series) using the Laplace transform for transient or complex amplitude method for steady-state vibration. Mechanical models of the replacement mechanisms with frictional bonds, corresponding to these models, are indicated. Analytical expressions are obtained for the coefficient of viscous damping and the reduced moment of inertia, which depend on the frequency of the steady vibration of the shaft. Dynamic characteristics for torsional vibration dampers equipped with a liquid (silicone) and a solid (steel) flywheel are compared.

**Key words:** damping of torsional vibrations, flywheel with frictional coupling, nonstationary flow along a channel, viscous incompressible fluid, properties of silicone oil.

*А. Н. СЫРОВАЦКИЙ***О ВОССТАНОВЛЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ТОЧЕЧНЫХ МАСС ПО СПЕКТРУ**

Одна з найважливіших задач теорії збурень полягає у вивченні спектра збуреного оператора та описі спектральних проекторів цього оператора. Класичним результатом, який дає розв'язок цієї задачі в скінченновимірному випадку для операторів з простим спектром, є теорема Льовнера. У даній роботі застосовується результат цього твердження для розв'язання конкретної практичної задачі. В роботі вивчається задача про лінійні коливання точкових мас, а також збурення її розв'язків, за допомогою зміни умов середовища експерименту. Досліджується поведінка частот коливаний при цих змінах. В роботі розв'язується як пряма задача (дослідження поведінки спектра при одновимірних збуреннях) так і зворотна задача (знаходження збурення по заданому спектру).

**Ключові слова:** самоспряжений оператор, спектр, збурення оператора, задача про лінійні коливання точкових мас.

Одна из важнейших задач теории возмущений состоит в изучении спектра возмущенного оператора и описании спектральных проекторов этого оператора. Классическим результатом, который дает решение этой задачи в конечномерном случае для операторов с простым спектром, является теорема Лёвнера. В данной работе применяется результат этого утверждения для решения конкретной практической задачи. В работе изучается задача о линейных колебаниях точечных масс, а также возмущения её решений, посредством изменения условий среды эксперимента. Исследуется поведение частот колебаний при этих изменениях. В работе решается как прямая задача (исследование поведения спектра при одномерных возмущениях) так и обратная задача (нахождения возмущения по заданному спектру).

**Ключевые слова:** самосопряженный оператор, спектр, возмущение оператора, задача о линейных колебаниях точечных масс.

One of the major tasks of the perturbation theory is to study spectrum of the perturbed operator and to describe its spectral projectors. The classical result, which gives a solution to this problem for the operators with a simple spectrum in the finite-dimensional case, is the Lowner theorem. In this paper the result of this statement is applied to solve a specific practical problem. In this paper the problem of linear oscillations of point masses is studied as well as perturbations of its solutions induced by changing the conditions of the experimental environment. The behavior of the oscillations' frequencies under these changes is investigated. Both the direct problem (investigation of the behavior of the spectrum for one-dimensional perturbations) and the inverse problem (finding the perturbation from a given spectrum) are solved.

**Key words:** self-adjoint operator, spectrum, perturbation of the operator, the problem of linear oscillations of point masses.

*С. Н. ТИМОШЕНКО***МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ СТАЛЕПЛАВИЛЬНОЙ ВАННЫ И ПОДОВОГО ЭЛЕКТРОДА ДУГОВОЙ ПЕЧИ ПОСТОЯННОГО ТОКА С ЦЕЛЮ ПОВЫШЕНИЯ ЕЕ ЭНЕРГОЭФФЕКТИВНОСТИ**

На основі чисельного моделювання розтікання струму у ванні дугової сталеплавильної печі постійного струму місткістю 12 тонн виконана оцінка питомої потужності перемішування при електровихровій течії металу, що характеризує інтенсивність процесів тепло- і масообміну. Збільшення глибини ванни при даній місткості печі і зміщення подового електрода щодо осі симетрії в певних межах є більш ефективним засобом підвищення енергоефективності дугової печі малої місткості, ніж застосування двох електродів стрижневого типу або електроду пластинчастого типу.

**Ключові слова:** дугова сталеплавильна піч постійного струму, подовий електрод, електровихрова течія, потужність перемішування, геометрія ванни,

енергоефективність.

На основе численного моделирования растекания тока в ванне дуговой сталеплавильной печи постоянного тока вместимостью 12 тонн выполнена оценка удельной мощности перемешивания при электровихревом течении металла, характеризующая интенсивность процессов тепло- и массообмена. Увеличение глубины ванны при данной вместимости печи и смещение подового электрода относительно оси симметрии в определенных пределах являются более эффективным средством повышения энергоэффективности дуговой печи малой вместимости, чем применение двух электродов стержневого типа или электрода пластинчатого типа.

**Ключевые слова:** дуговая сталеплавильная печь постоянного тока, подовый электрод, электровихревое течение, мощность перемешивания, геометрия ванны, энергоэффективность.

Based on the numerical simulation of current flow distribution in the bath of a 12-ton DC electric arc steelmaking furnace (EAF), the specific mixing power of the electro-vortex flow (EVF) in the liquid bath, characterizing the intensity of the heat and mass transfer processes, was estimated. Modernization of a standard bath (diameter to height ratio 4.0 – 5.5) to a "deep" one (ratio 1.7) allows reducing the duration of refining period and the specific energy consumption of the EAF by 9% due to growth of the EVF mixing power. For the given case it seems reasonable to install a single billet-type bottom electrode (BE) along the EAF axis of symmetry instead of two symmetrical BE, which leads to cost saving, reducing the heat loss due to water cooling and minimizing the refractory wear. If the realization of the "deep" bath is hampered by design constraints, it is advisable to install a single billet-type BE, shifted from the EAF axis of symmetry to a certain distance, which is a compromise solution between increasing the EAF energy efficiency and local wear of the lining. Using the fin-type BE in a small capacity EAF, operating by classical technology without leaving the "hot heel", seems less energy efficient than the billet-type BE.

**Key words:** DC electric arc steelmaking furnace, bottom electrode, electro-vortex flow, mixing power, bath geometry, energy efficiency.

УДК 519.85; 519.7

*Н. Є. ХАЦЬКО*

## СУЧАСНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ КОМПЕНСАЦІЇ ПОХИБОК ІНЕРЦІАЛЬНИХ ДАТЧИКІВ ДЛЯ ЗАСТОСУВАННЯ В ЕКСПЕРИМЕНТАХ ПО КАЛІБРУВАННЮ

Розглядаються методи калібрування інерційних датчиків і математичні моделі компенсації їх помилок, що дозволяють ідентифікувати оцінки параметрів цих моделей при проведенні натурних експериментів з калібрування. Огляд проводиться за матеріалами останніх десяти років. Аналіз літератури привів до виділення універсальної математичної моделі, що використовується в більшості експериментів. Також виділені типові фактори, які зазвичай враховуються в побудові моделей і розробці планів експериментів. Отримані результати в подальшому можуть бути корисними для вибору доступного і припустимого методу калібрування окремого інерціального модуля.

**Ключові слова:** калібрування інерціального датчика, математична модель компенсації похибок, зсув нуля.

Рассматриваются некоторые математические модели, применяемые в последнее десятилетие для калибровки инерциальных датчиков. Внимание к математическим моделям компенсации ошибок датчиков вызвано широким применением метода алгоритмической компенсации погрешностей инерциальной системы во время ее функционирования. В статье определены несколько основных математических моделей для ошибок гироскопов и акселерометров. Анализ литературы позволил выяснить факторы, на которые нужно обращать внимание при разработке математических моделей для датчиков, работающих на разных физических принципах, также привел к выделению универсальной математической модели, используемой в большинстве экспериментов. Полученные выводы могут быть использованы в дальнейшем при выборе доступного метода калибровки для отдельного инерциального модуля.

**Ключевые слова:** калибровка инерциального датчика, математическая модель компенсации ошибок, смещение нуля, несоосность осей датчика.

In this paper some of the mathematical models applied for calibration of inertial sensors in the last decade are considered. The attention that has been received by the mathematical models of sensor errors is mainly due to the wide application of the method of algorithmic compensation of errors in the inertial system during its operation. As a whole, calibration is limited to estimating the key errors: scale factor, offset and misalignment of the sensor axes. In the paper several basic mathematical error models of gyroscopes and accelerometers are defined. The analysis of the literature made it possible to determine the factors that must be taken into account when developing mathematical models for sensors operating on different physical principles, and also led to the identification of a universal mathematical model used in the most experiments. The main result of this review is the understanding that individual calibration of sensors, even without using precision stands, can significantly increase the accuracy of the inertial unit and is an indispensable stage of operation, especially for mass production sensors. The obtained conclusions can be used in the future when choosing an available calibration method for an individual inertial module.

**Key words:** calibration of the inertial sensor, mathematical model of error compensation, zero drift, sensor axes misalignments.

УДК 539.3

*Е. Г. ЯНЮТИН, Н. И. ВОРОПАЙ, П. А. ЕГОРОВ*

## ПРИМЕНЕНИЕ РАЗЛОЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ ШЛЕМИЛЬХА ДЛЯ АНАЛИЗА НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАНЫ

На основі теорії рядів Шльомільха та операційного числення запропоновано підхід до аналізу нестационарних коливань мембрани, викликаних кінематичними збуреннями. Він дозволяє знайти коефіцієнти в відповідних розвиненнях шуканих функцій, що описують коливання мембран у випадку вісесиметричних кінематичних навантажень. Зазначений підхід використовує інтегральне перетворення Лапласа у часі в процесі пошуку згаданих коефіцієнтів. Наведені приклади визначення поведінки мембрани в результаті різних початкових умов, які приєднані до рівняння нормальних (по відношенню до площини мембрани) переміщень точок на мембрані.

**Ключові слова:** мембрана, коливання, ряди Шльомільха, операційне числення.

На основе теории рядов Шлемилха и операционного исчисления предложен подход к анализу нестационарных колебаний мембраны, вызванных кинематическими возмущениями. Он позволяет определить коэффициенты в соответствующих разложениях искомым функций, которые описывают колебания мембраны в случае осесимметричных кинематических нагружений. Указанный подход использует интегральное преобразование Лапласа во времени в процессе поиска упомянутых коэффициентов. Приведены примеры определения поведения мембраны в результате различных начальных условий, которые присоединены к уравнению нормальных (по отношению к плоскости мембраны) перемещений точек на мембране.

**Ключевые слова:** мембрана, колебания, ряды Шлемилха, операционное исчисление.

Based on the Schlömilch series theory and operational calculus an approach to the analysis of non-stationary vibrations of a membrane caused by kinematic perturbations is proposed. It allows to determine the coefficients in the corresponding expansions of the unknown functions, which describe the vibrations of the membrane in the case of axisymmetric kinematic loadings. This approach uses the integral Laplace transformations in time in the process of searching for the mentioned coefficients. Examples of determining the behavior of the membrane as a result of various initial conditions that are attached to the equation of normal (with respect to the plane of the membrane) displacements of points on the membrane are given.

**Key words:** membrane, vibrations, Schlömilch series, operational calculus.